DOI:10.13537/j.issn.1004-3918.2013.10.055

第31卷 第10期 2013年10月 | 河南科学 HENAN SCIENCE | Vol.31 No.10 Oct. 2013

文章编号：1004-3918（2013）10-1597-03

一类包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的方程

高 丽，鲁伟阳，郝虹斐

（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘 要： 利用初等方法以及伪 Smarandache 函数和 Euler 函数的性质，讨论了一个数论函数方程 $\varphi(n)=Z(n^2)$ 的可解性，证明了该方程仅有正整数解 $n=1$.

关键词： 伪 Smarandache 函数；Euler 函数；方程；正整数解

中图分类号： O 156.4 **文献标识码：** A

An Equation Involving the Pseudo Smarandache Function and Euler Function

Gao Li， Lu Weiyang， Hao Hongfei

（College of Mathematics and Computer Science，Yan'an University，Yan'an 716000，Shaanxi China）

Abstract： The solvability of the equation $\varphi(n)=Z(n^2)$ was studied by using elementary methods and the properties of the Pseudo-Smarandache functions and the Euler functions. It was proved that the equation has only positive integer solution $n=1$.

Key words： Pseudo Smarandache function；Euler function；equation；integer solutions

美籍罗马尼亚著名数论专家 F. Smarandache[1]教授在《Only Problems，Not Solutions》一书中提出了 105 个尚未解决的数论问题，这引起了众多数论专家的兴趣．F. Smarandache 教授在该书中引入了著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 对任意的正整数 n，Smarandache 函数定义为最小的正整数 m 使得 $n|m!$，即：$S(n)=\min\{m:m\in N,n|m!\}$．并建议人们研究其性质，现已取得不少成果．后来人们依据 Smarandache 函数引入了伪 Smarandache 函数 $Z(n)$，定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$，即 $Z(n)=\min\left\{m:m\in N,n\,\middle|\,\frac{m(m+1)}{2}\right\}$．从 $Z(n)$ 的定义可以推出 $Z(n)$ 的前几个值为：$Z(1)=1$，$Z(2)=3$，$Z(3)=2$，$Z(4)=7$，$Z(5)=4$，$Z(6)=3$，$Z(7)=6$，$Z(8)=15$，$Z(9)=8$，$Z(10)=4$，…．关于 $Z(n)$ 的初等性质，许多学者进行了研究，并获得了不少有意义的结果．例如，Kenichiro Kashihhara[2]在文献[2]中论述了函数 $Z(n)$ 的一些初等性质，同时也提出了下面两个问题：

（A）求方程 $Z(n)=S(n)$ 的所有正整数解；

（B）求方程 $Z(n)+1=S(n)$ 的所有正整数解．

张文鹏[3]教授在文献[3]中彻底解决了这两个问题，并在文章结尾提出了 6 个问题，其中问题 5 如下：

求方程 $Z(n)=\varphi(n)$ 的所有正整数解，其中 $\varphi(n)$ 为 Euler 函数．这一方程有无限多个正整数解，例如当 n 为素数 p 时均满足方程．当 $n=2p$ 且 $p\equiv 1 \pmod 4$ 时，也满足该方程．除了这些平凡解外，是否还有其他正整数解是一个公开的问题．猜测该方程只有 $n=1$ 以及上述两种解．

收稿日期：2013-05-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目（10271093）；陕西省教育厅专项科研计划项目（07JK430）；延安大学自然科学专项科研基金项目（YDZ2013-04）；延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介：高 丽（1966-），女，陕西绥德人，教授，硕士研究生导师，主要从事数论、函数论方面的研究

鲁伟阳（1989-），男，陕西兴平人，硕士研究生，研究方向为数论．

范盼红[4]在其硕士学位论文《对Catalan数的性质以及关于Smarandache函数的几个方程的研究》中利用初等方法对此问题进行了研究，并给出该方程的解有如下形式：

①$n=p$，其中p为素数；

②$n=2p$，其中$p\equiv 1 \pmod 4$；

③$n=2^k p$，其中$p\equiv 1 \pmod 4$，且$p\mid(2^{k-1}-1)$.

关于函数方程$\varphi(n)=Z(n^2)$的可解性问题，至今似乎还没有人研究，至少我们目前没有看到相关的论文.因此，本文将利用初等方法研究该方程解的情况.

1 相关定义及引理

定义1[5] 伪Smarandache函数$Z(n)$：最小的正整数m使得n整除$\frac{m(m+1)}{2}$，即$Z(n)=\min\left\{m:m\in N,n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}$.

定义2[6] Euler函数$\varphi(n)$：不大于n且与n互素的正整数的个数.

引理1[6] Euler函数为积性函数，即对于任意互素的正整数m和n，则有

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n).$$

引理2[6] 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是正整数$n$的标准分解式，则有

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1).$$

引理3[6] 对于素数p与$\alpha\geqslant 1$，有$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$.

引理4[7] 对任意素数$p\geqslant 3$，$Z(p)=p-1$.

引理5[7] 对任意素数$p\geqslant 3$及$k\in N$，$Z(p^k)=p^k-1$. 当$p=2$时，则有

$$Z(2^k)=2^{k+1}-1.$$

引理6[7] $Z(n)$是不可加的，即$Z(m+n)$不恒等于$Z(m)+Z(n)$；$Z(n)$也不是可乘的，即$Z(m\cdot n)$不恒等于$Z(m)\cdot Z(n)$.

2 主要结论及证明

定理 对任意的正整数n，方程

$$\varphi(n)=Z(n^2) \tag{1}$$

仅有正整数解$n=1$.

证明 下面提到的p，p_i均为素数.

1）当n为奇数时，可以分以下几种情况讨论：

（i）当$n=1$时，$\varphi(1)=1$，$Z(1)=1$，所以$n=1$是方程（1）的解.

（ii）当$n=p$且$p\geqslant 3$时，$\varphi(p)=p-1$，$Z(p^2)=p^2-1$，则$\varphi(p)\neq Z(p^2)$，所以$n=p$不是方程（1）的解.

（iii）当$n=p^k$且$p\geqslant 3$，$k>1$时，$\varphi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$，$Z(p^{2k})=p^{2k}-1$，则$\varphi(p^k)\neq Z(p^{2k})$，所以$n=p^k$不是方程（1）的解.

（iv）当$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，其中$p_i>2(i=1,2,\cdots,k)$，$k>1$时，

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

若$\varphi(n)=Z(n^2)$，则根据函数$Z(n)$的定义有$n^2\mid\frac{\varphi(n)[\varphi(n)+1]}{2}$，即

$$p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_k^{2\alpha_k}\mid p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1),$$

亦即 $p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}\mid(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$,显然不成立.所以 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(1)的解.

2)当 n 为偶数时,可以分以下几种情况讨论:

(i)当 $n=2^k$ 时,$\varphi(2^k)=2^{k-1}(2-1)=2^{k-1}$,$Z(2^{2k})=2^{2k+1}-1$,则 $\varphi(2^k)\neq Z(2^{2k})$,所以 $n=2^k$ 不是方程(1)的解.

(ii)当 $n=2^kp^l$ 且 $k\geqslant1$,$p\geqslant3$ 时,$\varphi(2^kp^l)=\varphi(2^k)\varphi(p^l)=2^{k-1}p^{l-1}(p-1)$,若 $\varphi(n)=Z(n^2)$,则根据函数 $Z(n)$ 的定义有 $n^2\mid\frac{\varphi(n)[\varphi(n)+1]}{2}$,即 $2^{2k}p^{2l}\mid\frac{2^{k-1}p^{l-1}(p-1)[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]}{2}$,亦即 $2^{k+1}p^{l+1}\mid\frac{(p-1)[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]}{2}$.又 $(2,p)=1$,所以 $2^{k+1}\nmid\frac{p-1}{2}$,$p^{l+1}\nmid[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]$,所以 $2^{k+1}p^{l+1}\mid\frac{(p-1)[2^{k-1}p^{l-1}(p-1)+1]}{2}$ 不成立,因此,$n=2^kp^l$ 不是方程(1)的解.

(iii)当 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$(其中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\geqslant0,k\geqslant2$)时,令 $n=2^{\alpha_0}m$,则 $\varphi(n)=2^{\alpha_0-1}\varphi(m)$.若 $\varphi(n)=Z(n^2)$,则根据函数 $Z(n)$ 的定义有 $n^2\mid\frac{\varphi(n)[\varphi(n)+1]}{2}$,即 $2^{2\alpha_0}m^2\mid(2^{\alpha_0-2}\varphi(m))(2^{\alpha_0-1}\varphi(m)+1)$.又 $(2^{2\alpha_0},m^2)=1$,所以 $2^{2\alpha_0}\nmid(2^{\alpha_0-2}\varphi(m))$,$m^2\nmid(2^{\alpha_0-1}\varphi(m)+1)$,所以 $2^{2\alpha_0}m^2\nmid(2^{\alpha_0-2}\varphi(m))(2^{\alpha_0-1}\varphi(m)+1)$,矛盾,所以 $n=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(1)的解.

综上所述,方程(1)仅有正整数解 $n=1$.

猜想　对任意的正整数 n,当 $k\geqslant2$ 时,方程 $\varphi(n)=Z(n^k)$ 仅有正整数解 $n=1$.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publication House, 1993.

[2] Kashhaea K. Comments and topics on Smarandache notions and problems[M]. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[3] 张文鹏. 关于 F.Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报, 2008, 38: 173-175.

[4] 范盼红. 对 Catalan 数的性质以及关于 Smarandache 函数的几个方程的研究[D]. 西安: 西北大学, 2012.

[5] Sandor J. On a dual of the Pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 18-23.

[6] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

[7] 马　荣. Smarandache 函数及其相关问题研究[M]. 北京: 教育出版社, 2012.

(编辑　康　艳)